

## Δεύτερο τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

### Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

#### Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Αν  $\lim_n \frac{x_n}{n} = 3$  τότε η  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  δεν είναι φραγμένη.
- (ii) Αν  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών,  $x \in \mathbb{R}$  και για κάθε  $\varepsilon > 0$  άπειροι όροι της  $(x_n)$  ανήκουν στο διάστημα  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , τότε  $x_n \rightarrow x$ .
- (iii) Αν  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη και  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνουσα, τότε η  $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα.
- (iv) Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.
- (vi) Η ακολουθία  $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  έχει όριο στο  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

#### Θέμα 2

Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Αν  $x_n \rightarrow x$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x$ .
- (ii) Αν  $x_{n+1} - x_n \rightarrow x$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{x_n}{n} \rightarrow x$ .

#### Θέμα 3

Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών:

- (i)  $x_n = \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $y_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $z_n = \frac{n \cos(n!)}{n^2 + 7}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

#### Θέμα 4

- (i) Αν  $\lim_n [x_n] = \frac{1}{2}$ , να δείξετε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $[x_n] = 0$ , για κάθε  $n \geq n_0$ .
- (ii) Δίνεται η ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_1 = 1$  και αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x_n^2}.$$

Να δείξετε ότι:

- (a)  $x_n^2 - 2 < 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $x_{n+1}^2 - x_n^2 > 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Να εξετάσετε αν η  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα και σε περίπτωση που είναι, να υπολογίσετε το όριο αυτής.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!